

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记15——矩阵空间和秩1矩阵

≡

矩阵空间

矩阵空间是对向量空间的扩展，因为矩阵的本质是向量，所以与向量空间类似，也存在矩阵空间。

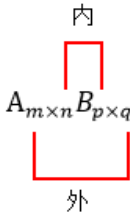
在向量空间中，任意两个向量的加法和数乘仍然在该空间内。类似的，所有固定大小的矩阵也组成了矩阵空间，在空间内的任意两个矩阵的加法和数乘也在该空间内。例如，M是所有3×3矩阵构成的空间，空间内的矩阵可以相加，也可以数乘，其结果仍然是3×3矩阵。虽然可以把它们中的两个相乘，但是没人会那么做，因为乘法与向量空间没有关系。

看起来我们需要随时注意乘法概念，线性代数中的乘法有别于中学时代标量间的乘法。向量与一个标量相乘，被明确定义为数乘；两个相同维度的向量间存在点积和叉乘，其写法上都与九九乘法表中的乘法类似，但是没有定义两个向量的乘法。虽然矩阵间定义了乘法，但存在限制，只有满足“攘外必先安内”原则的两个矩阵才能相乘。线性代数中的概念众多，学了线性代数后，再也不能愉快地做乘法了。

“攘外必先安内”：AB两个矩阵相乘，必须满足A的列数等于B的行数：

$$A_{m \times n} B_{p \times q} = B_{m \times q}$$

如果AB能够相乘，必须满足n = p，看起来n和p正好夹在m和q中间，m和q在外围：



相乘的结果当然是“共同御敌，一致对外”。

以3×3矩阵构成的空间M为例，M一共有9个元素，M的维度是9。M的标准基是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵的子空间

矩阵的子空间也是对向量空间的扩展，矩阵子空间需要满足数乘和加法仍处于同一集合内。

随笔分类 (211) ★★资源下载★★(1) Java并发编程(1) 程序员的数学(24) 单变量微积分(31) 多变量微积分(24) 概率(24) 机器学习(27) 软件设计(1) 数据分析(6) 数据结构与算法(27) 随笔(5) 线性代数(34) 项目管理(2) 转载(4) 随笔档案 (205) 2021年2月(1) 2020年3月(2) 2020年2月(6) 2020年1月(4) 2019年12月(7) 2019年11月(15) 2019年9月(3) 2019年8月(6) 2019年7月(1) 2019年6月(8) 2019年5月(3) 2019年4月(5) 2019年3月(7) 2019年2月(3) 2019年1月(7) 更多 阅读排行榜 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768) 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772) 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430) 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099) 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772) 评论排行榜 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8) 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7) 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7) 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5) 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4) 推荐排行榜 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7) 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7) 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6) 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5) 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5) 最新评论 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积) 如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90° --猫猫猫猫猫大人
--

矩阵空间M也有一些特殊的子空间，比如将M空间内的两个对称矩阵相加或数乘，仍然得到对称矩阵；上三角矩阵子空间，将空间内的两个矩阵相加或数乘，仍然得到上三角矩阵。仍然以3×3矩阵构成的空间M为例，看看M中的几个子空间。

对称矩阵子空间

设M中的对称子空间是S，6个对称矩阵构成了S的标准基：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

S维度是6，表示为：

$$\dim(S) = 6$$

上三角矩阵子空间

设上三角矩阵子空间是U，U的维度也是6，它的维度表示为：

$$\dim(U) = 6$$

很明显，上三角矩阵的基是：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

对角矩阵子空间

如果一个矩阵既是对称矩阵又是上三角矩阵，则这个矩阵称为对角矩阵(diagonal matrix)。对称矩阵是一个主对角线之外的元素皆为0的矩阵，常写为diag (λ₁, λ₂,..., λ_n)。

主对角线上的元素可以为 0 或其他值，对角线上元素相等的对角矩阵称为数量矩阵；对角线上元素全为1的对角矩阵就是单位矩阵。对角矩阵的运算包括和、差运算、数乘运算、同阶对角阵的乘积运算，且这些运算的结果仍为对角阵。

对角矩阵A：

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

数量矩阵，对称矩阵的对角元线上的元素都相等：

$$A = \begin{bmatrix} a & & \\ & a & \\ & & \ddots \\ & & & a \end{bmatrix}$$

单位矩阵，对称矩阵的对角元线上的元素都为1：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{3 \times 3}$ 内的对称矩阵和上三角矩阵的交集是一个对角矩阵，所有对角矩阵也构成一个子空间其维度是3：

$$\dim(S \cap U) = 3$$

很明显， $S \cap U$ 的标准基是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S+U矩阵子空间

对于 $S \cup U$ ，它或者在对称矩阵子空间 S 中，或者在上三角矩阵子空间 U 中，或者在对角矩阵子空间 $S \cap U$ 中。我们对 $S \cup U$ 不感兴趣，主要的原因是 $S \cup U$ 并不能构成子空间，可以随便举个例子：

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_1 + S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看到， $U_1 + S_1$ 是个没什么特点的矩阵，它不属于 $S \cup U$ ，所以不符合子空间的加法封闭性。

现在，我们将 $S \cup U$ 扩大一点，变成 $S + U$ ，也就是不单独地取 S 和 U 中的矩阵，而是取 S 中的任一矩阵和 U 中的任一矩阵，将二者相加：

$$S + U = \text{any element of } S + \text{any element of } U$$

其结果是整个 M 空间，即：

$$S + U = M$$

当然， $S + U$ 的维数也是 M 的维数：

$$\dim(S + U) = \dim(M) = 9$$

矩阵子空间维数的关系

现在将上面4个矩阵子空间的维数放在一起：

$$\dim(S) = 6, \quad \dim(U) = 6$$

$$\dim(S \cap U) = 3, \quad \dim(S + U) = 9$$

可以看出：

$$\dim(S) + \dim(U) = \dim(S \cap U) + \dim(S + U)$$

秩1矩阵

秩1矩阵就是秩为1的矩阵，它的行空间和列空间的维度都是1：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$C(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \quad R(A) = C(A^T) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{rank}(A) = \dim(C(A)) = \dim(R(A)) = 1$$

更进一步，秩1矩阵可以表示为一列乘以一行的形式：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_u \underbrace{[1 \quad 3 \quad 5]}_{v^T} = uv^T$$

我们之所以对秩1矩阵感兴趣，是因为可以通过秩1矩阵搭建出任意矩阵，比如秩为4的矩阵，可以通过4个秩1矩阵搭建而成。

如果M是所有5×10矩阵的矩阵空间，那么一个由秩4矩阵组成的子集是否是一个子空间？

当然不是，因为两个矩阵之和的秩不大于两个矩阵的秩之和。设P是M中两个任意秩4矩阵之和，P的秩可能是5，不在秩4矩阵集合内。虽然P是两个秩4矩阵之和， $\text{rank}(P) \leq 4 + 4 = 8$ ，但由于P仍然在 $M_{5 \times 10}$ 内，而 $M_{5 \times 10}$ 中的矩阵的秩不会大于5，所以 $\text{rank}(P)$ 的最大值是5。同理，M中由秩1矩阵组成的子集也不是子空间。

秩1矩阵与零空间的关系

假设有一个向量x，x中的分量之和为0：

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

很明显x满足零空间的条件，它是某个矩阵的零空间，这个矩阵是什么呢？也就是说对于 $Ax = 0$ 来说，A是什么？x的维数又是什么？

先回答最后一个，根据条件S可以确定，x的一个分量可以由另外三个分量表示：

$$x_4 = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_3$$

可见x的主变量有1个，自由变量有3个，维数是3。

再看零空间所属的矩阵，可以很容易判断：

$$A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$Ax = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

A是秩1矩阵，根据《[线性代数14——行空间和左零空间](#)》空间和维数的关系： $A_{m \times n}$ 的零空间是位于 R^n 下的 $n - r$ 维空间，A的零空间的维数3，x是3维的。

A的列空间和行空间都是1维的：

$$C(A) = span([1]), \quad \dim(C(A)) = 1$$

$$R(A) = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad \dim(R(A)) = 1$$

A的左零空间是零向量。

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [线性代数](#)

标签: [矩阵空间](#), [对称矩阵](#), [子空间](#), [秩1矩阵](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+ 加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [线性代数笔记14——行空间和左零空间](#)
» 下一篇: [线性代数笔记16——图和网络](#)

posted on 2018-10-10 23:43 我是8位的 阅读(4962) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

FinetUI Core

12,000

800

900

9

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

广告

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日~3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
- Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes